CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

Exercice 1 4 points

Partie A

1°) a) $B \in (C)$ — 0,25

b) $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$ — 0,5

B placé correctement — 0,25

2°) a) forme exponentielle de $z_B - z_A$ — 0,25

$z_E - z_A$ — 0,75

b) A, B et E alignés — 0,5

3°) E correctement placé — 0,5

Partie B

1°) a) $\arg \frac{z'-1}{z-1} = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$ — 0,5

b) A, M et M' alignés $\iff \frac{z^2}{z-1} \in \mathbb{R}$ — 0,5

Exercice 2 5 points

Enseignement obligatoire

Partie A

1°) $\frac{C_n^2}{C_{n+8}^2}$ ou $\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$ 0,5

2°) a) $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$ 1,5

(dont 0,5 pour la démarche)

b) $\lim_{n \to +\infty} p(n) = 1$ 0,25

interprétation 0,25

Partie B

1°) $p(4) = \frac{19}{66}$ 0,25

2°) a) Valeurs de X 0,25

b) $p(X = 50) = \left(\frac{19}{66}\right)^2$

$p(X = 15) = \frac{2 \times 19 \times 47}{66^2}$

$p(X = -20) = \left(\frac{47}{66}\right)^2$

$\Big\}$ 1,5

c) $E(X) = \frac{5}{33}$ 0,5

Enseignement de spécialité

1) $PGCD(4^6 - 1 ; 4^5 - 1) = 3$ — 0,5

2°) $u_2 = 5$; $u_3 = 21$; $u_4 = 85$ — 0,5

3°) a) pour tout n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$ — 1

b) pour tout n, $u_n \in \mathbb{N}$ — 0,5

c) u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux (Bezout) — 0,75

4°) a) (v_n) est une suite géométrique

premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$

raison 4

$\Big\}$ 0,5

b) $v_n = 4^n \times \frac{1}{3}$

$u_n = \frac{4^n - 1}{3}$

$\Big\}$ 0,5

c) $PGCD(4^{n+1} - 1 ; 4^n - 1) = 3$ — 0,75

Problème (11 points)

Partie A (6,5 points)

1°) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ______ 0,25

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ______ 0,25

c) C_0 admet deux asymptotes d'équation $y=0$ et $y=1$ ______ 0,25

2°) $K\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de C_0 ______ 0,5

3°) pour tout x réel $f_0'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ ______ 0,5

$f_0'(x) > 0$ donc f_0 est croissante sur $\mathbb{R}$ ______ 0,25

4°) a) $T : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ ______ 0,25

b) la position de C_0 par rapport à T est donnée par le signe de $f_0(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = \dots = \dfrac{g(x)}{4\,(1+e^x)}$ ______ 0,5

c) $g'(x) = e^x - xe^x - 1$ et $g''(x) = -xe^x$ ______ 0,25+0,25

d) $g''(x)$ est du signe de $-x$ donc

x		0	
$g''(x)$	+	0	−

______ 0,25

g' admet 0 pour maximum en 0 donc $g'(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ ______ 0,5

g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $g(0) = 0$

d'où son signe

x		0	
$g'(x)$	+	0	−

______ 0,5

e) sur $]-\infty, 0]$ C_0 est au dessus de T
sur $]0, +\infty[$ C_0 est au dessous de T ______ 0,25

5°) Tracé de C_0 ______ 0,5
Tracé de T ______ 0,25

6°) a) M et M' sont symétriques par rapport à d ______ 0,5

b) C_1 est l'image de C_0 dans la symétrie orthogonale d'axe d ______ 0,25

Tracé de C_1 ______ 0,25

Problème (suite)

Partie B (4,5 points)

1°) $u_0 = \left[\ln(1+e^x)\right]_0^1 = \dots = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ ——— 0,5

2°) $u_0 + u_1 = 1$. Donc $u_1 = 1 - \frac{\ln(1+e)}{2}$ ——— 0,5 + 0,25

3°) la suite u est positive ——— 0,25

4°) a) $k(x) = \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$ ——— 0,25

b) sur $[0,1]$ $k(x) \leqslant 0$ ——— 0,25

c) sur $[0,1]$ $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant 0$
donc $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$
et ... $u_{n+1} \leqslant u_n$
la suite u est donc décroissante ——— 0,5

5°) a) $u_{n-1} + u_n = \dots = \frac{1-e^{-(n-1)}}{n-1}$ ——— 0,5

b) $u_2 = 1 - e^{-1} - u_1 = \dots = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - e^{-1}$ ——— 0,25

6°) a) $v_n = \frac{1-e^{-(n-1)}}{2(n-1)}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ ——— 0,5.

b) comme $u_{n-1} \geqslant u_n$, on a $v_n \geqslant u_n$
et d'après 3 $0 \leqslant u_n$ ——— 0,5

c) d'après le théorème des gendarmes :
comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$
et $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$
on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ——— 0,25