# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2001

## MATHÉMATIQUES

SÉRIE : ES

spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures – COEFFICIENT : 7

***Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4***

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée*

*Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.*
*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Le formulaire officiel de mathématiques, prévu par l'arrêté du 27 mars 1991, est joint au sujet.*

***Tournez la page S.V.P.***

# EXERCICE 1 *(4 points)*

**Commun à tous les candidats**

Le tableau suivant indique, en millions, la population de la France métropolitaine d'après les recensements depuis 1946.

| Année | Rang $x_i$ de l'année | Population $y_i$ |
|---|---|---|
| 1946 | 0 | 40,439 |
| 1954 | 8 | 42,706 |
| 1962 | 16 | 46,425 |
| 1968 | 22 | 49,712 |
| 1975 | 29 | 52,592 |
| 1982 | 36 | 54,335 |
| 1990 | 44 | 56,615 |
| 1999 | 53 | 58,416 |

***Le détail des calculs statistiques effectués avec une calculatrice n'est pas demandé.***
***Les nombres à déterminer seront arrondis à trois décimales.***

1. Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre $x$ et $y$ ?
   Un ajustement affine est-il envisageable ?

2. Le plan est rapporté à un repère orthogonal, les unités graphiques étant :
   - 0,25 cm sur l'axe des abscisses,
   - 1 cm sur l'axe des ordonnées, la graduation des ordonnées débutant à 40.

   *a)* Construire le nuage de points $M_i$ $(x_i ; y_i)$.

   *b)* Indiquer les coordonnées du point moyen G associé à la série $(x, y)$ et placer ce point sur le graphique précédent.

3. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés.
   Tracer cette droite D sur le graphique précédent.

4. En supposant que cette évolution de la population se poursuive, donner une estimation de la population en 2005.

# EXERCICE 2 *(5 points)*

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les six points suivants sont définis par leurs coordonnées :

$A(1, -1, 3)$ ; $B(1, 1, 3)$ ; $C(1, 1, -3)$ ; $A'(19, -1, 3)$ ; $B'(19, 1, 3)$ ; $C'(19, 1, -3)$.

***Aucune figure n'est exigible.***

1. *a)* Montrer que les trois points A, B et C ne sont pas alignés.
   *b)* Établir que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est normal au plan (ABC).
   *c)* Écrire une équation cartésienne du plan (ABC).
   *d)* Les quatre points A, B, B′ et C sont-ils coplanaires ?

2. *a)* Prouver que le triangle ABC est rectangle.
   *b)* Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

3. *a)* Démontrer que les trois points A′, B′ et C′ ne sont pas alignés.
   *b)* Les plans (ABC) et (A′B′C′) sont-ils sécants ou parallèles ? Justifier votre réponse.

4. *a)* Calculer les longueurs des segments [AB], [BC] et [AA′] notées respectivement $l_0$, $l_1$ et $l_2$.
   *b)* Les nombres $l_0$, $l_1$ et $l_2$ sont-ils les trois premiers termes d'une suite arithmétique ?
   Si oui, donner la raison.
   *c)* Les nombres $l_0$, $l_1$ et $l_2$ sont-ils les trois premiers termes d'une suite géométrique ?
   Si oui, donner la raison.

*Tournez la page S.V.P.*

# PROBLÈME *(11 points)*

**Partie A :**

Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi : [2\,;20] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x-2-2\ln(x).$$

1. Étudier les variations de la fonction φ puis dresser son tableau de variation.

2. Montrer que la fonction φ s'annule exactement une fois sur l'intervalle [2 ; 20].
   Indiquer la valeur arrondie à une décimale de ce nombre.

3. En déduire le signe de la fonction φ sur l'intervalle [2 ; 20] et récapituler ces résultats dans un tableau.

**Partie B :**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal, les unités graphiques étant un centimètre sur l'axe des abscisses et cinq centimètres sur l'axe des ordonnées.

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f : ]2\,;20] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x\ln(x)}{x-2}.$$

$\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni de ce repère.

1. *a*) Montrer que la dérivée $f'$ de $f$ a le même signe que φ sur ]2 ; 20].
   *b*) Étudier les variations de la fonction $f$, déterminer la limite de $f$ en 2 puis dresser le tableau de variation de cette fonction.

2. Prouver qu'il existe un unique point de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

**Partie C :**

Soit $g$ la fonction définie par :

$$g : [2\,;20] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}x^2-2x\ln(x).$$

1. Montrer que $g$ est une primitive de φ sur [2 ; 20].

2. Soit I le nombre défini par :

$$\mathrm{I} = \int_{16}^{20} \varphi(x)\,dx.$$

   *a*) Exprimer le nombre I uniquement à l'aide de nombres entiers et des deux nombres ln 2 et ln 5.
   *b*) Donner la valeur de I arrondie à deux décimales.