

Baccalauréat ES Antilles – Guyane juin 2001

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

À partir des productions réalisées pour l'année 2000, on veut comparer les résultats prévisibles de deux entreprises A et B jusqu'en 2015.

1. La production de l'entreprise A pour l'année 2000 est de 11 000 pièces. Chaque année, sa production augmente de 3 %.
 - a. Quelle est sa production en 2001 ? en 2002 ? en 2015 ? (Donner les résultats arrondis à l'entier.)
 - b. Quel est le pourcentage d'augmentation de la production de 2000 à 2015 ? (Résultat arrondi à 0,1 près.)
 - c. Exprimer en fonction de n la production de l'entreprise A en l'an $(2000 + n)$ (n entier $0 \leq n \leq 15$).
2. L'entreprise B a produit 9 000 pièces en 2000, et sa production augmente de 5 % par an.
 - a. Quelle est sa production en 2015 ?
 - b. Exprimer en fonction de n la production de l'entreprise B en l'an $(2000 + n)$ (n entier $0 \leq n \leq 15$).
 - c. Déterminer l'entier n tel que en l'an $2000 + n$, la production de l'entreprise B dépasse pour la première fois, la production de l'entreprise A.

EXERCICE 2

4 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule :

- si elle est rouge, il gagne 10 F ;
- Si elle est jaune, il perd 5 F ;
- Si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir remplacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 F, sinon il perd 4 F.

1. Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
2. Calculer la probabilité de l'événement « le joueur est gagnant ».
3. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).

a. Établir la loi de probabilité de la variable X .

b. Calculer l'espérance de X .

4. Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

EXERCICE 2

4 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La courbe de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln x.$$

est donnée en annexe.

On considère la suite (u_n) à termes strictement positifs définie par :

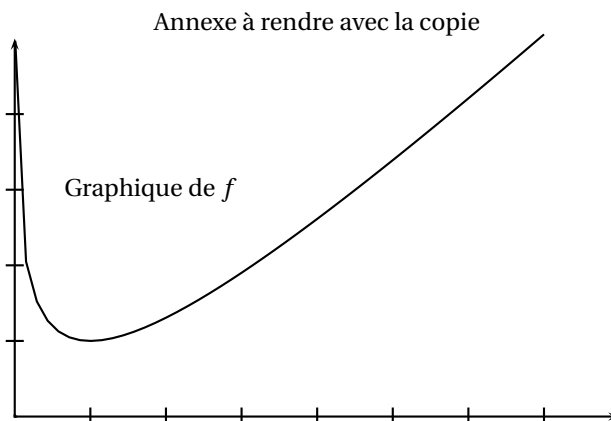
$$\begin{cases} u_0 &= 7 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

Partie I

1. Au moyen du graphique donné en annexe, déterminer le minimum de f sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 1$.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n .
Montrer que la suite (u_n) est monotone décroissante.

Partie II

1. Construire dans le repère de la courbe (C) donné en annexe la droite (D) d'équation $y = x$.
2. En vous aidant de la droite (D), représenter sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessous les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
3. Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne la limite de la suite (u_n) ?



PROBLÈME**12 points**

Le but de ce problème est l'étude de deux fonctions qui modélisent les importations et les exportations de l'entreprise E.

Partie A**★ Étude de fonctions**

Les fonctions f et g sont définies sur $[0; \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{36}{8 + e^{-x}} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\ln(x+1) + 2,5.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 2 cm).

1.
 - a. Étudier les variations de f et de g .
 - b. Calculer les limites de f et de g en $+\infty$.
2. Représenter graphiquement ces deux fonctions. On nommera leurs courbes respectivement (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) , et on se limitera aux valeurs de x entre 0 et 6.
3. Recopier et compléter le tableau suivant, avec des valeurs numériques arrondies à 10^{-2} près.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$				4,47			
$g(x)$		3,89					

Partie B**★ Étude de la fonction $g - f$**

On pose $h = g - f$.

Le but de cette question est d'étudier le signe de $h'(x)$ afin d'établir le tableau des variations de h sur $[0; \infty[$.

1. Calculer la dérivée h' de h .
2.
 - a. Vérifier que $e^x \cdot h'(x) = \frac{2e^x}{x+1} - \frac{36}{(8 + e^{-x})^2}$.
 - b. On rappelle que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $e^x > x + 1$.
Établir l'inégalité $(8 + e^{-x})^2 \geq 64$.

En utilisant successivement ces deux résultats, établir que

$$e^x h'(x) \geq \frac{2e^x}{x+1} - \frac{9}{16} \quad \text{et que} \quad e^x h'(x) \geq 2 - \frac{9}{16}.$$

- c. Établir le tableau de variation de h .
- d. Montrer que $h(x)$ s'annule pour une seule valeur x_0 comprise entre 0 et 6.
Déterminer un encadrement de x_0 de largeur 10^{-2} .

Partie C**★ Application**

Notations : x désigne le temps en années. On pose $x = 0$ au 1^{er} janvier 2000.
Pour l'entreprise E, $f(x)$ désigne le montant, en millions de francs, des achats pour l'année x et $g(x)$ désigne le montant, en millions de francs, de ses ventes.

1. Quel est le montant des achats et des ventes de cette entreprise à la fin de l'année 2000?
2. À partir d'une certaine date, les ventes l'emportent sur les achats.
 - a. Déterminer l'année au cours de laquelle les ventes l'emportent sur les achats.
 - b. Indiquer alors le rang de la semaine.